BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

О ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Э.Б.СУЛТАНОВА

Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена установлению n-кратной полноты системы собственных и присоединенных элементов одного класса полиномиальных операторных пучков в банаховом пространстве. Здесь за возмущенный оператор берется спектральный оператор скалярного типа, некоторая натуральная степень которого дискретна.

Рассмотрим в банаховом пространстве X оператор A, некоторая натуральная степень которой является дискретным оператором.

Справедлива следующая

Лемма 1. Если A^n дискретен при некотором натуральном n, то:

а) спектр оператора A состоит из счетного числа точек, не имеющих конечных предельных точек;

б) $R(\lambda ,A^n)$ компактна для всех $\lambda \notin \sigma(A^n)$, где $\sigma(A^n)$ -спектр оператора A^n;

с) любая точка c из спектра $\sigma(A)$ оператора A является полюсом некоторого конечного порядка $\nu(c)$ резольвенты оператора A, и если элемент y удовлетворяет для некоторого k условию

$$(A-cI)^k y=0,$$

то y удовлетворяет также условию

$$(A-cI)^{\nu(c)} y=0,$$

где I - единичный оператор. Кроме того, множество

$$K(c)=\left\{y:(A-cI)^{\nu(c)} y=0\right\}$$

является корневым подпространством, соответствующим собственному значению c. А также, если $E(c;A)$ есть собственный проектор, соответствующий собственному значению c, то $E(c;A)$-проектор, отображающий X на $K(c)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $0\notin\sigma(A^n)$ и A^{-n} компактен. Тогда известно, что $R(\mu)=(\mu I-A^{-n})^{-1}$ существует для любого комплексного числа μ, за исключением нуля и не более, чем счетной последовательности точек $\mu_m\neq 0$, стремящейся к нулю. Ясно, что для любой из точек μ_m существует элемент $x_m\neq 0$, $A^{-m}_{x_m}=\mu_m x_m$. Отсюда следует, что $A^{m}_{x_m}=\mu_m^{-1}x_m$, так что $\{\mu_m^{-1}\}\subseteq\sigma(A^{-n})$. С другой стороны, если $\lambda\neq 0,\ \lambda\neq\mu_m^{-1},\ m\geq 0$, то полагая $\lambda=\mu^{-1}$, имеем

$$-\mu\left(\mu^{-1}I-A^{n}\right)A^{-n}R(\mu)=I$$

и

$$-\mu A^{-n}R(\mu)\left(\mu^{-1}I-A^{n}\right)x=-\mu R(\mu)A^{-n}\left(\mu^{-1}I-A^{n}\right)x=-R(\mu)\left(A^{-n}-\mu\ I\right)x=x$$

для любого $x\in D(A^{n})$.

Следовательно, $\lambda=\mu^{-1}\in\rho\left(A^{n}\right)$ (резольвентное множество оператора A^{n}) и

$$\left(\mu^{-1}I-A^{n}\right)^{-1}=-\mu A^{-n}R(\mu). \tag{1}$$

Отсюда следует, что $\sigma(A^{n})=\{\mu_m^{-1}\}$.

С другой стороны, верно тождество

$$(\lambda I-A)^{-1}=\left(\lambda^{n}I-A^{n}\right)^{-1}(\lambda^{n-1}I+\lambda^{n-2}A+\ldots+\lambda A^{n-2}A^{n-1}). \tag{2}$$

Последнее означает, что всякое число $\lambda=c$, принадлежащее $\sigma(A^{n})$, является полюсом некоторого конечного порядка $\nu(c)$ резольвенты оператора A^{n}, отсюда и из формулы (2) видно, что точка c является полюсом порядка $\nu(c)$ для $(\mu^{-1}I-A)^{-1}$. Итак, доказаны утверждения а), б) и первая и вторая части утверждения с).

Третья часть утверждения с) прямо следует из (2) и соответствующего утверждения для оператора A^{n}.

Пусть Γ -достаточно малая, замкнутая, простая и положительно направленная кривая, охватывающая точку c, то, согласно теореме Рисса-Шаудера и равенству (1),

$$E(c,A^{n})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\lambda I-A^{n}\right)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}A^{-n}\left(A^{-n}-\lambda^{-1}I\right)^{-1}\lambda^{-1}d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\mu^{-1}A^{-1}\left(\mu I-A^{-n}\right)^{-1}d\mu,$$

где Γ^{1} - достаточно малая, замкнутая, простая и положительно направленная кривая, охватывающая точку c^{-1}. Теперь, если учесть функциональное исчисление для ограниченного оператора, то последнее выражение оператора $E(c;A^{n})$ равно

$$A^{-n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\mu^{-1}\left(\mu I-A^{n}\right)^{-1}d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\left(\mu I-A^{-n}\right)^{-1}d\mu=E(c^{-1};A^{-n}).$$

Этим мы установили взаимно однозначное соответствие между точками из $\sigma(A^{n})$ и отличными от нуля точками из $\sigma(A^{-n})$ по формуле $\mu\to\mu^{-1}$, при этом

$$(\mu I-A^{n}\ )^{-1}=-\mu^{-1}A^{-1}(\mu^{-1}I-A^{-n})^{-1}\quad\mu\notin\sigma(A^{n}),$$

а соответствующие проекторы связаны равенством

$$E(\mu;A^{n})=E(\mu^{-1};A^{-n}).$$

Если учесть, что проекторы $E(\mu^{-1})$ одинаковы для операторов A^{-1} и A^{-n}, то формула примет следующий вид

$$E(\mu; A^n) = E(\mu^{-1}; A^{-n}).$$

Лемма доказана полностью.

Интерес представляет также следующая

Лемма 2. Пусть A^n- дискретен при некотором натуральном n в пространстве X и $\{\lambda_i\}$- спектр оператора A.

Тогда подпространство

$$\{x : E(\lambda_i, A)x = 0,\ 1 \le i < \infty\}$$

состоит из всех таких $x \in X$, для которых $(A - \lambda I)^{-1} x$ является целой функцией от λ.

Доказательство. Как указано выше, резольвенты операторов $(A - \lambda I)^{-1}$ и $(A^n - \lambda^n I)^{-1}$ связаны тождеством

$$(A - \lambda I)^{-1} = (\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} A + \ldots + \lambda A^{n-2} + A^{n-1}) \cdot (A^n - \lambda^n I)^{-1}. \quad (3)$$

(3) показывает, что если $(A^n - \lambda^n I)^{-1}$- целая функция, то целым будет также $(A - \lambda I)^{-1}$. Отсюда в силу леммы 2.6 из [1] (см. гл.XIX), следует утверждение данной леммы.

Следующая лемма играет важную роль при установлении полноты системы собственных и присоединенных элементов операторных пучков.

Лемма 3. Пусть S -спектральный оператор скалярного типа и S^n компактен при некотором натуральном n. Если $\sigma(S) = \{\lambda_j\}$ $(j = 1,2,\ldots)$ и $\lambda \notin \sigma(S)$, то

$$\left\|(S - \lambda I)^{-1}\right\| \le M \cdot \sup_j \frac{1}{|\lambda - \lambda_j|}.$$

Доказательство. По предположению, S^n является компактным оператором. Отсюда следует, что спектр $\sigma(S)$ состоит из собственных значений, причем каждое собственное значение конечнократно, а соответствующее подпространство, порожденное собственными и присоединенными элементами оператора S, конечномерно и возможной предельной точкой $\sigma(S)$ может быть только точка нуль.

Если $E(\cdot)$ - разложение единицы оператора S, то

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E(\lambda_j). \quad (4)$$

Если $\lambda \notin \sigma(S)$, то из (4) получаем

$$(S - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} E(\lambda_j). \quad (5)$$

Теперь, учитывая теорему 2.10 из [1] (см.гл.XVII) в (5), получим утверждение леммы. Лемма доказана.

Теперь предположим, что X является рефлексивным банаховым пространством.

Верна следующая

Теорема. Пусть G-спектральный оператор скалярного типа и G^n дискретен. Кроме того, пусть

1)

$$\sum_{\lambda_j \neq 0} s_j^p(G^{-1}) < \infty,$$

где p-некоторое положительное число;

2) Все собственные значения оператора G, за исключением, быть может конечного числа лежат на лучах

$$\alpha_k = \left\{ z : \arg z = \frac{k\pi}{n} \right\} \quad (k = 0,1,2,\ldots,2n-1)$$

и угол между соседними лучами меньше $\frac{\pi}{p}$;

3) B_k - компактные операторы.

Тогда система собственных и присоединенных элементов пучка

$$G(\lambda) = G^n + B_0 G^n + \lambda B_1 G^{n-1} + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1} G \ + \lambda^n I,$$

n - кратно полна в пространстве X.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $0 \notin \sigma(G)$. Из леммы 1 следует, что спектр оператора G состоит из собственных значений конечной кратности с единственной возможной предельной точкой на бесконечности. Очевидно, что для любого элемента $y \in D(G)$

$$G^n y + B_0 G^n y + \lambda B_1 G^{n-1} y + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1} G y + \lambda^n y = 0. \qquad (6)$$

Положим $G^n y = x$ и $G^{-1} = S$. Тогда (6) принимает вид

$$x + B_0 x + \lambda B_1 S x + \lambda^2 B_2 S^2 x + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1} S^{n-1} x + \lambda^n S^n x = 0.$$

Отсюда получаем

$$G(\lambda) S^n = I + B_0 + \lambda B_1 S + \lambda^2 B_2 S^2 + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1} S^{n-1} + \lambda^n S^n,$$

где S-спектральный оператор скалярного типа и S^n-компактен.

Положим

$$S(\lambda) = G(\lambda) S^n.$$

Нетрудно видеть, что система последовательностей $\left\{ \varphi_j^{(\nu)} \right\}$ $(\nu = 0,1,\ldots,n-1)$ является цепочкой системы собственных и присоединенных элементов пучка $G(\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_j^{(\nu)} = S^n f_j^{(\nu)} \qquad (\nu = 0,1,\ldots,n-1; \ j = 1,2,\ldots),$$

где $\left\{ f_j^{(\nu)} \right\}$ $(\nu = 0,1,\ldots,n-1; \quad j = 1,2,\ldots)$ - цепочка системы собственных и присоединенных элементов пучка $S(\lambda)$.

Теперь, учитывая рефлексивность пространства X и теорему 2 из [6], получаем, что система

$$\left\{f_j^{(\nu)}\right\} \quad (\nu = 0,1,...,n-1; \quad j = 1,2,...)$$

n-кратно полна в X. Так как $S^n(X) = X$,то система

$$\varphi_j^{(\nu)} = S^n f_j^{(\nu)} \qquad (\nu = 0,1,...,n-1; \; j = 1,2,...)$$

также n-кратно полна в X. Теорема доказана полностью.

Замечание. Вопросы, связанные с установлением полноты системы собственных и присоединенных элементов операторных пучков в банаховом пространстве, изучены в работах [2]-[5]. В отличие от этих работ, в настоящей работе невозмущенный оператор берется из широкого класса операторов.

В заключение выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю академику Дж.Э.Аллахвердиеву за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы (Спектральные операторы). Изд-во «Мир», Москва, 1974, 662 стр.
2. Аллахвердиев Дж.Э. О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, являющихся рациональными функциями параметра. ДАН СССР, 159, №3, 1964, стр.951-955.
3. Ахмедов А.М. Некоторые вопросы спектральной теории вполне непрерывных операторов в банаховом пространстве, рационально зависящих от параметра. Кандидатская диссертация. Баку, 1970, 45стр.
4. Гасанов Э.Э. Теоремы полноты системы собственных и присоединенных элементов рациональных операторных пучков в банаховом пространстве. Кандидатская диссертация. Баку, 1973, 63 стр.
5. Маркус А.С. К спектральной теории полиномиальных операторных пучков в банаховом пространстве. Сибирский математический журнал, том XIII, №6, 1967, стр.1346-1369.
6. Султанова Э.Б. О полноте системы собственных и присоединенных элементов некоторых полиномиальных операторных пучков в банаховом пространстве. «Труды ИММ», 2006,том XXV.

QEYRİ-MƏHDUD OPERATOR DƏSTƏLƏRİNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ MƏXSUSİ ELEMENTLƏRİNİN TAMLIĞI HAQQINDA

E.B.SULTANOVA

XÜLASƏ

İşdə Banax fəzasında təsir edən bir sinif polinomial operator dəstələrinin məxsusi və qoşma elementləri sistemlərinin n - qat tamlığı haqqında teorem isbat olunmuşdur. Burada həyəcanlaşma operatoru əvəzinə müəyyən natural dərəcəsi diskret olan skalyar tipli operator götürülmüşdür.

ON A COMPLETENESS OF GENERALIZED ELEMENTS FOR THE UNBOUNDED OPERATOR PENCILS

E.B.SULTANOVA

SUMMARY

This work is devoted for the establishment of the n-fold completeness of system of eigen-and adjoint elements of a class of polynomial operator pencils in Banach space. Here as a spectral operator of scalar type is taken operator, which some natural power is discrete operator.